

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen.

Faculté des Sciences Economiques, Commerciales, Sciences de Gestion et
Comptabilité et Finance.
1^{ière} année LMD (2018/2019).

Examen du premier semestre en Mathématiques

Exercice 1 :

1. Soient P, Q deux propositions différentes. En dressant la table de vérité, montrer l'équivalence suivante :

$$[(P \wedge Q) \vee \bar{P}] \Leftrightarrow [(\bar{P} \vee \bar{Q}) \Rightarrow \bar{P}].$$

2. Donner la négation de la proposition suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} / [(x + y \leq 0) \Rightarrow (y^2 > x)].$$

3. Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par: $f(x) = 4x - 7$. Par la contraposée, montrer que :

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Exercice 2 :

- I) Soit la suite numérique $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + \frac{1}{3} \end{cases}$$

1. Montrer par recurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n < 1$.
2. Montrer que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.
3. Soit la suite numérique $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = U_n - 1$
Montrer que $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique puis donner l'expression du terme général.
4. Par **deux méthode différente**, calculer la limite de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 3 :

 Calculer les intégrales suivantes:

$$I_1 = \int_1^2 \frac{x}{3x^2 - 2} dx, \quad I_2 = \int (xe^{3x}) dx$$

Exercice 4 :

 Résoudre les deux équations suivantes:

$$1) 9^x + 3^x - 2 = 0 \quad 2) 2 \log(5 - x) = \log(4 - x) + 1.$$

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen.

Faculté des Sciences Economiques, Commerciales, Sciences de Gestion et
Comptabilité et Finance.
1^{ière} année LMD (2018/2019).

Correction de l'examen du premier semestre en Mathématiques

Exercice 1 :

- Soient P, Q deux propositions différentes. En dressant la table de vérité, montrer l'équivalence suivante :

$$[(P \wedge Q) \vee \bar{P}] \Leftrightarrow [(\bar{P} \vee \bar{Q}) \Rightarrow \bar{P}].$$

0.25	0.25	0.5	0.25	0.5	0.25	0.5	0.5	0.5
P	Q	$(P \wedge Q)$	$\bar{P}$	$[(P \wedge Q) \vee \bar{P}]$	$\bar{Q}$	$(\bar{P} \vee \bar{Q})$	$[(\bar{P} \vee \bar{Q}) \Rightarrow \bar{P}]$	l'équivalence
1	1	1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1

- La négation de la proposition suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} / [(x + y \leq 0) \Rightarrow (y^2 > x)].$$

est:

$$\begin{array}{ccc} \exists x \in \mathbb{R} / \forall y \in \mathbb{R}, & [(x + y \leq 0) \wedge (y^2 \leq x)] & \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 \quad 0.25 \quad 0.25 \end{array}$$

- Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par: $f(x) = 4x - 7$. Par la contraposée, montrer que :

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

On pose: $P: "x_1 \neq x_2"$ et $Q: "f(x_1) \neq f(x_2)"$,

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}) \quad (0.5)$$

On a $\bar{Q}: "f(x_1) = f(x_2)"$ (0.25) et $\bar{P}: "x_1 = x_2"$ (0.25). Donc:

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow 4x_1 - 7 = 4x_2 - 7 \\ &\Rightarrow 4(x_1 - x_2) = 0 \\ &\Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \end{aligned} \quad (0.25)$$

Exercice 2 :

I) Soit la suite numérique $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + \frac{1}{3} \end{cases}$

1. Montrer par recurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n < 1$.

a) **Vérification**: puisque $U_0 = 0$ alors $0 \leq U_0 < 1$. (0.5)

b) **On suppose** que $0 \leq U_n < 1$ et **on montre** pour la même chose pour U_{n+1}

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq U_n < 1 \\ 0 \leq \frac{2}{3}U_n < \frac{2}{3} \\ +\frac{1}{3} < \frac{2}{3}U_n + \frac{1}{3} < \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \\ 0 \leq U_{n+1} < 1 \end{array} \right\} (01pt)$$

c) **Conclusion**: $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n < 1$.

2. Montrer que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} - U_n = \frac{-1}{3}U_n + \frac{1}{3} \quad (0.25)$$

On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left. \begin{array}{l} 0 \leq U_n < 1 \\ -\frac{1}{3} < \frac{-1}{3}U_n \leq 0 \\ 0 < -\frac{1}{3}U_n + \frac{1}{3} \leq \frac{1}{3} \end{array} \right\} (01pt)$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} - U_n > 0$ alors $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante. (0.25)

3. Soit la suite numérique $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = U_n - 1$.
Montrer que $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique. i.e. $V_{n+1} = qV_n$

$$\left. \begin{array}{l} V_{n+1} = U_{n+1} - 1 \\ = \frac{2}{3}U_n + \frac{1}{3} - 1 \\ = \frac{2}{3}U_n - \frac{2}{3} \\ = \frac{2}{3}(U_n - 1) \\ = \frac{2}{3}V_n \end{array} \right\} (01.5pt)$$

Donc $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique, de raison $q = \frac{2}{3}$.

4. Par **deux méthode différente**, calculer la limite de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

a) Première méthode:

Comme $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante et majorée alors elle est convergente (0.5 + 0.5)

Pour trouver sa limite, il suffit de résoudre l'équation :

$$l = \frac{2}{3}l + \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3}l = \frac{1}{3} \quad (01pt) \\ \Rightarrow l = 1.$$

b) Deuxième méthode :

Puisque (V_n) est une suite géométrique de raison $-1 < q = \frac{2}{3} < 1$, donc $\lim V_n = 0$ (01pt).

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = U_n - 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = V_n + 1$. Ce qui fait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n \right) + 1 = 1$ (0.5)

Exercice 3 :

I) Calculer les intégrales suivantes:

1)

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_1^2 \frac{x}{3x^2 - 2} dx, \\ &= \frac{1}{6} \int_1^2 \frac{6x}{3x^2 - 2} dx \quad (0.25) \\ &= \frac{1}{6} [\ln |3x^2 - 2|]_1^2 \quad (0.5) \\ &= \frac{1}{6} [\ln |3(2)^2 - 2| - \ln |3(1)^2 - 2|] \\ &= \frac{1}{6} \ln(10). \quad (0.25) \end{aligned}$$

2)

$$I_3 = \int (xe^{3x}) dx$$

Par la méthode de l'intégration par parties, on a

$$: \begin{cases} u = x & \rightarrow u' = 1 \\ v' = e^{3x} & \rightarrow v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{cases} \quad (0.25 \times 2)$$

donc

$$\begin{aligned}
 I_3 &= x \left(\frac{1}{3} e^{3x} \right) - \int \frac{1}{3} e^{3x} dx & (0.5) \\
 &= \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \int 3 e^{3x} dx \right) & \{(01pt) \\
 &= \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + C
 \end{aligned}$$

II) Résoudre les équations suivantes:

$$\begin{aligned}
 9^x + 3^x - 2 = 0 &\Leftrightarrow (3^2)^x + 3^x - 2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow 3^{2x} + 3^x - 2 = 0 \quad (0.25)
 \end{aligned}$$

On pose $t = 3^x > 0$ (0.25),

$$t^2 + t - 2 = 0 \text{ donc } \Delta = 9, t_1 = -2 \text{ (refusé) }, t_2 = 1 \text{ (accepté)} \quad (2 \times 0.25)$$

$$\text{Donc } 1 = 3^x \Rightarrow x = 0 \quad (0.5)$$

$$2) \quad 2 \log(5 - x) = \log(4 - x) + 1.$$

On commence d'abord par trouver le domaine de définition:

$$\begin{aligned}
 D &= \{x \in \mathbb{R} / 5 - x > 0 \text{ et } 4 - x > 0\} & (0.25) \\
 D &=]-\infty, 4[
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2 \log(5 - x) &= \log(4 - x) + 1 \Leftrightarrow \log(5 - x)^2 = \log(4 - x) + \log 10 & (0.25) \\
 &\Leftrightarrow \log(5 - x)^2 = \log 10(4 - x) & (2 \times 0.25) \\
 &\Leftrightarrow (5 - x)^2 = 10(4 - x) & (0.25) \\
 &\Leftrightarrow 25 - 10x + x^2 = 40 - 10x \\
 &\Leftrightarrow x^2 = 15 \\
 &\Leftrightarrow x = \pm \sqrt{15} \in D & (0.5)
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } S = \{-\sqrt{15}, +\sqrt{15}\}$$